第27卷 第3期　　工 程 数 学 学 报　　Vol. 27 No. 3
2010年06月　　CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS　　June 2010

文章编号:1005-3085(2010)03-0455-08

异步多重休假 $G^{(X)}/GI^{(Y)}/k$ 排队系统排队长度的比较*

颜荣芳， 周　霞

(西北师范大学数学与信息科学学院，兰州　730070)

摘　要: 本文讨论了异步多重休假 $G^{(X)}/GI^{(Y)}/k$ 排队系统的排队长度，运用随机序的理论和方法，通过顾客来到人数、服务次数及服务容量等诸多随机变量在不同窗口下的增凸序，得到了异步多重休假排队系统在这些窗口排队长度的增凸序，通过顾客来到数向量在不同窗口下的超摸序，给出了这些窗口排队长度的增凸序。

关键词: 增凸序；超模序；排队长度；超模函数

分类号: AMS(2000) 60K20　　**中图分类号**: O226　　**文献标识码**: A

1　引言

作为随机运筹学中富有特色的研究分支，关于休假排队系统的研究可以追溯到20世纪70年代中期，其奠基性的工作由Levy和Yechial在1975年共同完成。由于休假排队系统一方面客观地反映了服务过程可能因某些突发事件导致中断这一事实，另一方面为排队系统的优化设计和运行控制提供了重要的理论和方法，因此关于这一问题的研究在最近二十年倍受学术界的关注，并且在单服务台休假排队模型的研究中取得了一系列深刻的研究成果[1-6]。然而，由于问题本身的复杂性，在过去的二十年，这一研究几乎一直停留在单服务台的休假排队模型，只有零星的工作涉及到多服务台休假排队模型。其实早在1976年，Levy和Yechial[7]就讨论了休假时间服从指数分布的 $M/M/k$ 排队系统，基于传统的生灭过程的理论和方法，他们建立了关于队长和忙的服务台数联合分布的微分方程组，并得到了稳态分布满足的差分方程。但是，由于这个庞大的微分方程组过于复杂，在求解过程中遇到了难以克服的困难，Levy和Yechial仅仅给出了平均队长以及忙的服务台数的分布。20世纪80年代初，Neuts等[8]推进了结构矩阵分析方法在随机模型中的应用，在这一应用中率阵是不可或缺的工具。Vinod[9]基于结构矩阵分析和拟生灭过程的理论和方法研究了 $M/M/k$ 休假排队系统，但是由于未能求出率阵，Vinod只给出了其拟生灭过程刻画，关于稳态队长和等待时间分布等重要指标没有得到任何结果。随后，Igaki[10]讨论了只有一个服务台可进入休假的 $M/M/2$ 排队系统，对这个本质上仍是“单服务台休假”的模型，给出了各种稳态分布。总之，在开始研究休假排队系统的前二十年，关于多服务台休假系统的分布几乎没有取得任何实质性的进展。近年来，关于多服务台休假系统的研究逐渐活跃起来，许多学者在 $M/M/k$ 休假排队系统以及各种休假策略的 $M/M/k$、$GI/M/k$ 系统的研究中取得了初步结果，成功地得到多种稳态指标的详尽刻画，见田乃硕[11-13]。需要说明的是，关于多服务台休假策略的研究迄今为止基本上限于空竭(exhaustive service)服务类型：即当完成一个服务且系统中无顾客等待时方可进入休假状

收稿日期: 2008-08-18.　**作者简介**: 颜荣芳(1964年4月生)，男，博士，教授. 研究方向：应用概率论.
***基金项目**: 国家自然科学基金(60474029)；甘肃省自然科学基金(ZS-011-A25-024-G)；甘肃省教育厅科研项目(041-14)；西北师范大学创新工程资助项目(NWNU-KJCXGC-03-09).

态，与单服务台的空竭服务规则不同的是现在一个服务台完成服务时系统中无顾客等待，这并不意味着整个系统是空的。

与此同时，对成批到达和成批服务排队系统中各指标间相依关系的研究现近年来引起了学术界的普遍关注，业已取得了一系列丰硕的研究成果。Prabhu[14] 对 $M^{(X)}/G^{(Y)}/1$ 和 $G^{(X)}/M^{(Y)}/1$ 排队系统各自的拥挤程度在普通随机序下进行了比较。Cai[15] 进一步在增凸序下研究了 $M^{(X)}/G^{(Y)}/1$ 的拥挤程度，得到了与 Prabhu[14] 平行的结果。Müller[16] 研究了 $G/G/1$ 系统中顾客等待时间在增凸序下关于顾客服务时间与顾客到达时间间隔相依程度的单调性。随后，Cai[17] 分别研究了 $M^{(X)}/G^{(Y)}/1$ 和 $G^{(X)}/M^{(Y)}/1$ 的排队长度在增凸序意义下的单调性。

通常把由 k 个服务窗口组成的成批到达和成批服务排队模型表示为 $G^{(X)}/G^{(Y)}/k$，其中 X, Y 分别表示成批来到的顾客人数和服务容量。一般把顾客相继到达的时间间隔与服务时间假定为两个独立的更新过程，而且与成批来到的顾客人数及服务容量相互独立。本文试图讨论基于空竭服务类型的异步多重休假 (asynchronous multiple vacation, 简记为 $AS, WV)$ $G^{(X)}/GI^{(Y)}/k$ 的排队长度，基于超模序和增凸序刻画的随机变量的相依程度，在增凸序下讨论该系统中不同窗口排队长度的单调性。异步多重休假策略是由 Levy 和 Yechial[7] 研究 $M/M/k$ 排队系统时引入的，所谓异步多重休假 $G^{(X)}/GI^{(Y)}/k$ 模型就是在 $G^{(X)}/GI^{(Y)}/k$ 模型中引入异步多重休假策略：每一个服务台完成一批顾客服务时，若系统中无顾客等待，就开始一个随机长度的休假。若休假结束时系统中仍无顾客等待，服务台继续一个独立同分布的休假，直到某次休假结束时系统中已有顾客等待再立刻转入服务。各服务台可分别地进入和终止休假状态。在 (AS, WV) 策略下，每个服务台要么处在忙要么处在休假两种状态之一。异步休假策略最大限度地利用空闲服务台获取经济效益。正象 Doshi[2] 在其综述中指出的那样：无论理论意义还是应用价值，多服务台休假排队系统的研究都更为重要。

2 随机序和相依性

在进入本文的主要研究之前，首先回顾和本文有关的随机序和相依性的一些概念和结果。

定义1 称函数 $\phi:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 为超模函数，若对任意的 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbf{R}^n$，都有 $\phi(\mathbf{x})+\phi(\mathbf{y})\le\phi(\mathbf{x}\wedge\mathbf{y})+\phi(\mathbf{x}\vee\mathbf{y})$。

定义2 设 $\mathbf{X},\mathbf{Y}$ 为两个 n 维随机向量，称

1) $\mathbf{X}$ 在超模序下小于 $\mathbf{Y}$ $(\mathbf{X}\le_{sm}\mathbf{Y})$，若对任何超模函数 $f(\mathbf{x})$，只要 $E[f(\mathbf{X})]$ 和 $E[f(\mathbf{Y})]$ 都存在，就有 $E[f(\mathbf{X})]\le E[f(\mathbf{Y})]$；

2) $\mathbf{X}$ 在增凸序下小于 $\mathbf{Y}$ $(\mathbf{X}\le_{icx}\mathbf{Y})$，若对任何增凸函数 $f(\mathbf{x})$，只要 $E[f(\mathbf{X})]$ 和 $E[f(\mathbf{Y})]$ 都存在，就有 $E[f(\mathbf{X})]\le E[f(\mathbf{Y})]$。

有关超模函数、超模序和增凸序更详细的讨论, 读者可参阅文献 [18]。为了完整起见，作为引理，我们引用文献 [18] 中与本文研究有关的关于超模函数、超模序及增凸序的一些研究结果。

引理1 1) 设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 和 $(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$ 是两个随机向量，若

$$(X_1,X_2,\cdots,X_n)\le_{sm}(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n),$$

则对于具有相同单调性的函数 $g_i:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ $(i=1,2,\cdots,n)$，都有

$$\big(g_1(X_1),g_2(X_2),\cdots,g_n(X_n)\big)\le_{sm}\big(g_1(Y_1),g_2(Y_2),\cdots,g_n(Y_n)\big);$$

2) 设$\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\cdots,\mathbf{X}_n$为一列独立随机向量，$\mathbf{Y}_1,\mathbf{Y}_2,\cdots,\mathbf{Y}_n$为另一列独立随机向量，$\mathbf{X}_i$，$\mathbf{Y}_i$具有相同的维数$k_i\ (i=1,2,\cdots,n)$，若$\mathbf{X}_i\le_{sm}\mathbf{Y}_i\ (i=1,2,\cdots,n)$，则

$$(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\cdots,\mathbf{X}_n)\le_{sm}(\mathbf{Y}_1,\mathbf{Y}_2,\cdots,\mathbf{Y}_n);$$

3) 设$\mathbf{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$和$\mathbf{Y}=(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$是两个随机向量，若$\mathbf{X}\le_{sm}\mathbf{Y}$，则对任意的$\mathbf{I}\subseteq\{1,2,\cdots,n\}$，都有$\mathbf{X_I}\le_{sm}\mathbf{Y_I}$；

4) 设$\mathbf{\Theta}$是一个随机向量，若对$\mathbf{\Theta}$支撑上的所有θ，都有$[X\mid\mathbf{\Theta}=\theta]\le_{sm}[Y\mid\mathbf{\Theta}=\theta]$，则$\mathbf{X}\le_{sm}\mathbf{Y}$。

引理2　设$\mathbf{X}$和$\mathbf{Y}$是两个随机向量，若$\mathbf{X}\le_{sm}\mathbf{Y}$，则对任何递增的超模函数$\phi:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$，都有$\phi(\mathbf{X})\le_{icx}\phi(\mathbf{Y})$。

引理3　设$X_i\ (i=1,\cdots,m)$是m个独立的随机变量，$Y_i\ (i=1,\cdots,m)$也是m个独立的随机变量。若对于任意的$i\ (1\le i\le m)$，都有$X_i\le_{icx}Y_i$，则

$$\sum_{i=1}^{m}X_i\le_{icx}\sum_{i=1}^{m}Y_i.$$

引理4　设$\mathbf{X},\mathbf{Y}$为两随机向量，那么

1) 若$\mathbf{X}\le_{icx}\mathbf{Y}$，则对任意的增凸函数$f(\mathbf{x})$，都有$f(\mathbf{X})\le_{icx}f(\mathbf{Y})$；

2) 若$\mathbf{X}\le_{icx}\mathbf{Y}$且$E[\mathbf{X}]=E[\mathbf{Y}]$，则$-\mathbf{X}\le_{icx}-\mathbf{Y}$。

引理5　设$\{X_n\}$为一列非负独立同分布的随机变量，$\{Y_n\}$为另一列非负独立同分布的随机变量，M和N是分别独立于$\{X_n\}$和$\{Y_n\}$的正整值随机变量。若$M\le_{icx}N$，$X_i\le_{icx}Y_i$，则

$$\sum_{j=1}^{M}X_j\le_{icx}\sum_{j=1}^{N}Y_j.$$

引理6　设$\mathbf{X}_j=(X_{j,1},X_{j,2},\cdots,X_{j,m})$，$j=1,2,\cdots$为一列非负随机向量，$\mathbf{M}=(M_1,M_2,\cdots,M_m)$和$\mathbf{N}=(N_1,N_2,\cdots,N_m)$为两个由非负整值随机变量所构成的随机向量，$\mathbf{M}$和$\mathbf{N}$均独立于所有的$\mathbf{X}_j\ (j=1,2,\cdots)$，若$\mathbf{M}\le_{sm}\mathbf{N}$，则

$$\Big(\sum_{j=1}^{M_1}X_{j,1},\sum_{j=1}^{M_2}X_{j,2},\cdots,\sum_{j=1}^{M_m}X_{j,m}\Big)\le_{sm}\Big(\sum_{j=1}^{N_1}X_{j,1},\sum_{j=1}^{N_2}X_{j,2},\cdots,\sum_{j=1}^{N_m}X_{j,m}\Big).$$

引理7　设(X_1,X_2)、(Y_1,Y_2)为两个随机向量。若$(X_1,X_2)\le_{sm}(Y_1,Y_2)$，则$Y_1-Y_2\le_{cx}X_1-X_2$。

引理8　若$\phi:\mathbf{R}^n\longrightarrow\mathbf{R}$是超模函数，则对具有相同单调性的函数$g_i(x):\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}\ (i=1,2,\cdots,n)$，$\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\phi(g_1(x_1),g_2(x_2),\cdots,g_n(x_n))$也是超模函数。

3　$G^{(X)}/GI^{(Y)}/k/AS,WV$ 排队模型

我们考虑如下的$G^{(X)}/GI^{(Y)}/k/AS,\ WV$系统：

1) 顾客按批次在时刻$t_1,t_2,\cdots$ (约定$t_0=0$)分别以批量$X_1,X_2,\cdots$到达由k个进行同一服务但价格或服务质量未必完全相同的服务台(服务窗口)组成的服务站。顾客到达服务站后自行选择服务窗口排队，顾客可以在服务开始前更换服务窗口。记时刻t_n来到第j个服务窗口的

顾客人数为 $X_{n,j}\,(n\geq 1,\,1\leq j\leq k)$，$u_n=t_n-t_{n-1}\,(n\geq 1)$，显然

$$X_n=\sum_{j=1}^{k}X_{n,j},\quad 1\leq j\leq k,\quad n\geq 1.$$

2) 顾客按先到先服务的原则按批接受服务。第 j 个服务窗口中顾客相继的服务时间 $v_{n,j}\,(n\in\mathcal{N})$ 是独立同分布的随机变量，但 $v_{n,j}$ 的分布可能依赖于 j。$Y_{n,j}\,(1\leq j\leq k,\,n\in\mathcal{N})$ 为第 $j\,(1\leq j\leq k)$ 个窗口在 $[t_{n-1},t_n)$ 中每次服务的服务容量，$Y_{n,j}$ 独立同分布于 Y_j。记 $D_{n,j}\,(1\leq j\leq k)$ 为第 j 个窗口在 $[t_{n-1},t_n)$ 中的总服务容量，D_n 为系统在 $[t_{n-1},t_n)$ 中的总服务容量，则 $D_{n,j}=Y_{1,j}+\cdots+Y_{N_j(u_n),j}$，其中 $N_j(t)=\sup\{n:v_{1,j}+\cdots+v_{n,j}\leq t\}$。显然

$$D_n=\sum_{j=1}^{k}D_{n,j}.$$

3) 对各窗口而言：当一次服务结束时，若排队长度大于此次服务的容量，服务员立即开始下一次服务；若排队长度小于此次服务的容量且窗口有顾客排队等待时，服务员将有两种选择：要么对现有的顾客进行服务，要么等到排队长度达到服务容量时再开始服务。

4) 所有的服务窗口按异步多重休假 (AS,WV) 策略休假，或者按 3) 描述的服务策略对顾客进行服务。

5) 对任意的 n 及 $j\,(1\leq j\leq k)$，随机向量 $\{(D_{n+1,j},X_{n,j})\}$ 独立同分布，$D_{s+1,j}$ 与 $X_{t,j}\,(s\neq t)$ 相互独立，而 $D_{s+1,j}$ 与 $X_{s,j}$ 可能相依。随机过程

$$\{Y_{n,j}:n\in\mathcal{N}\},\quad \{v_{n,j}:n\in\mathcal{N}\},\quad \{(D_{n+1,j},X_{n,j}):n\in\mathcal{N}\}$$

相互独立。

记 Q_n 为系统在时刻 t_n 的排队长度，$Q_{n,j}$ 为时刻 t_n 第 j 个服务窗口处的排队长度，则

$$Q_n=\sum_{j=1}^{k}Q_{n,j},$$

于是可以用 $\{X_n,u_n,v_n,Y_n\}$ 描述 $G^{(X)}/GI^{(Y)}/k/AS,\ WV$ 的排队规律。相应地第 j 个窗口的排队规律可以用 $\{X_{n,j},u_n,v_n,Y_{n,j}\}$ 描述。下面分两种情况建立 $Q_{n,j}$ 的递归方程：

第一种情况：若第 j 个服务员在时刻 t_n 仍在休假，要么 $Q_{n-1,j}=0$，因而该服务员在 u_n 时段的服务容量 $D_{n,j}=0$，因此

$$Q_{n,j}=X_{n,j}+Q_{n-1,j}=X_{n,j}+\max(0,Q_{n-1,j}-D_{n,j}),\quad n=1,2,\cdots,$$

要么 $Q_{n-1,j}\neq 0$，即该服务员在 u_n 时段对顾客进行了服务，但在时刻 t_n 或 t_n 之前该窗口已空，于是 $Q_{n,j}=X_{n,j}+\max(0,Q_{n-1,j}-D_{n,j})$，$n=1,2,\cdots$。

第二种情况：若时刻 t_n 服务员在工作，不管采取那种服务策略，顾客一旦进入服务就不再考虑排队，于是

$$Q_{n,j}=X_{n,j}+Q_{n-1,j}-D_{n,j}=X_{n,j}+\max(0,Q_{n-1,j}-D_{n,j}),\quad n=1,2,\cdots.$$

这样对第 $j(1\leq j\leq k)$ 个服务窗口，我们有

$$Q_{0,j}=0,\quad Q_{n,j}=X_{n,j}+\max(0,Q_{n-1,j}-D_{n,j}),\quad n=1,2,\cdots.$$

命题1 函数

$$\phi_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\max\left(0,x_n+\max(0,x_{n-1}+\cdots+\max(0,x_2+\max(0,x_1\underbrace{))\cdots))}_{n}\right.$$

为超模函数。

证明　由超模函数的定义，容易证明$y(x_1,x_2)=\max(0,x_1+x_2)$为超模函数，由引理8可知，$\phi_2(x_1,x_2)=\max(0,x_2+\max(0,x_1))$为超模函数；假设$\phi_k(x_1,x_2,\cdots,x_k)$是超模函数；当$n=k+1$时，注意到

$$\phi_{k+1}(x_1,x_2,\cdots,x_{k+1})=\phi_k\big(\max(0,x_2+\max(0,x_1)),x_3,\cdots,x_{k+1}\big),$$

根据引理8，$\phi_{k+1}(x_1,x_2,\cdots,x_{k+1})$是超模函数。综上得证$\phi_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为超模函数。

现在我们讨论异步多重休假排队系统$G^{(X)}/GI^{(Y)}/k$不同窗口排队长度在增凸序下的单调性。

定理1 若$E[X_{n,i}]=E[X_{n,j}]$, $Y_{n,i}$和$Y_{n,j}$是同分布的随机变量，$v_{n,i}$和$v_{n,j}$同分布的随机变量，则$Q_{n,j}\le_{icx}Q_{n,i}\,(n\in\mathcal{N},\ 1\le i,\ j\le k,\ i\ne j)$。

证明　注意到$v_{n,i}$和$v_{n,j}$同分布，容易得到$N_i(u_{n+1})$与$N_j(u_{n+1})$同分布，于是$N_i(u_{n+1})\le_{sm}N_j(u_{n+1})$。根据引理6，

$$\sum_{s=1}^{N_i(u_{n+1})}Y_{s,i}\le_{sm}\sum_{s=1}^{N_j(u_{n+1})}Y_{s,i}.$$

由于$Y_{n,i}$和$Y_{n,j}$具有相同的分布，因此

$$\sum_{s=1}^{N_j(u_{n+1})}Y_{s,i}\le_{sm}\sum_{s=1}^{N_j(u_{n+1})}Y_{s,j}.$$

从而

$$\sum_{s=1}^{N_i(u_{n+1})}Y_{s,i}\le_{sm}\sum_{s=1}^{N_j(u_{n+1})}Y_{s,j},$$

即$D_{n+1,i}\le_{sm}D_{n+1,j}$。考虑到$E[X_{n,i}]=E[X_{n,j}]$，由引理1中的2)，容易证明

$$(X_{n,i},D_{n+1,i})\le_{sm}(X_{n,j},D_{n+1,j}).$$

由引理7可得

$$X_{n,j}-D_{n+1,j}\le_{icx}X_{n,i}-D_{n+1,i}.\tag{1}$$

基于(1)，下面用数学归纳法证明

$$Q_{n,j}-D_{n+1,j}\le_{icx}Q_{n,i}-D_{n+1,i}.\tag{2}$$

由于$Q_{1,j}=X_{1,j}$，$Q_{1,i}=X_{1,i}$，因此，当$n=1$时(2)成立；假设$n=m$时(2)成立，由引理4可得

$$\max(0,Q_{m,j}-D_{m+1,j})\le_{icx}\max(0,Q_{m,i}-D_{m+1,i}).$$

当$n=m+1$时，注意到

$$Q_{m+1,s}-D_{m+2,s}=X_{m+1,s}-D_{m+2,s}+\max(0,Q_{m,s}-D_{m+1,s}),\quad s=i,j,$$

由引理3，容易证明$Q_{m+1,j}-D_{m+2,j}\le_{icx}Q_{m+1,i}-D_{m+2,i}$，从而(2)成立。

对任意的$s=i,j$，考虑到$Q_{n+1,s}=X_{n+1,s}+\max(0,Q_{n,s}-D_{n+1,s})$，由增凸序关于卷积的封闭性及增凸序关于增凸函数的封闭性得到$Q_{n,j}\le_{icx}Q_{n,i}$。至此，定理1得证。

定理2 若

$$X_{n,i}\le_{icx}X_{n,j},\quad Y_{n,i}\le_{icx}Y_{n,j},\quad N_i(u_{n+1})\le_{icx}N_j(u_{n+1}),$$

$$E[N_i(u_{n+1})]\cdot E[Y_{n,i}]=E[N_j(u_{n+1})]\cdot E[Y_{n,j}],$$

则$Q_{n,i}\le_{icx}Q_{n,j}\,(n\in\mathcal{N},\,i,j\in\{1,\cdots,k\},\,i\neq j)$。

证明 根据引理5可得

$$\sum_{s=1}^{N_i(u_{n+1})}Y_{s,i}\le_{icx}\sum_{s=1}^{N_j(u_{n+1})}Y_{s,j},$$

即$D_{n+1,i}\le_{icx}D_{n+1,j}$。由瓦尔德等式

$$E\left[\sum_{s=1}^{N_i(u_{n+1})}Y_{s,i}\right]=E\left[Y_{s,i}\right]\cdot E\left[N_i(u_{n+1})\right],$$

$$E\left[\sum_{s=1}^{N_j(u_{n+1})}Y_{s,j}\right]=E\left[Y_{s,j}\right]\cdot E\left[N_j(u_{n+1})\right],$$

从而$E[D_{n+1,i}]=E[D_{n+1,j}]$，于是引理4中2)有$-D_{n+1,i}\le_{icx}-D_{n+1,j}$。

根据引理3，容易得到

$$X_{n,i}-D_{n+1,i}\le_{icx}X_{n,j}-D_{n+1,j}.$$

类似于定理1的证明，用数学归纳法可以证明：$Q_{n,i}-D_{n+1,i}\le_{icx}Q_{n,j}-D_{n+1,j}$。注意到

$$Q_{n+1,s}=X_{n+1,s}+\max(0,Q_{n,s}-D_{n+1,s}),\quad s=i,j,$$

由增凸序关于卷积的封闭性及增凸序关于增凸函数的封闭性，直接得到$Q_{n,i}\le_{icx}Q_{n,j}$。

当$v_{n,i}$与$v_{n,j}$同分布时，由于

$$N_i(u_{n+1})\le_{icx}N_j(u_{n+1}),\quad E\left[N_i(u_{n+1})\right]=E\left[N_j(u_{n+1})\right].$$

由定理2直接得到下面的推论。

推论1 若$X_{n,i}\le_{icx}X_{n,j}$，$v_{n,i}$与$v_{n,j}$同分布，$E[Y_{n,i}]=E[Y_{n,j}]$，则$Q_{n,j}\le_{icx}Q_{n,i}\,(n\in\mathcal{N},\,1\le i,\,j\le k,i\neq j)$。

定理3 若$(X_{1,j},X_{2,j},\cdots,X_{n,j})\le_{sm}(X_{1,i},X_{2,i},\cdots,X_{n,i})$，则$Q_{n,j}\le_{icx}Q_{n,i}\,(n\in\mathcal{N},\,1\le i,\,j\le k,\,i\neq j)$。

证明 因为$(X_{1,j},X_{2,j},\cdots,X_{n,j})\le_{sm}(X_{1,i},X_{2,i},\cdots,X_{n,i})$，由引理1中的3)有

$$X_{n,j}\le_{sm}X_{n,i},\quad (X_{1,j},X_{2,j},\cdots,X_{n-1,j})\le_{sm}(X_{1,i},X_{2,i},\cdots,X_{n-1,i}),$$

根据引理2，容易证明$X_{n,j}\le_{icx}X_{n,i}$。

注意到$(X_{1,j},X_{2,j},\cdots,X_{n-1,j})\le_{sm}(X_{1,i},X_{2,i},\cdots,X_{n-1,i})$，由引理1中的1)，我们有

$$\big(g_1(X_{1,j}),g_2(X_{2,j}),\cdots,g_{n-1}(X_{n-1,j})\big)\le_{sm}\big(g_1(X_{1,i}),g_2(X_{2,i}),\cdots,g_{n-1}(X_{n-1,i})\big),$$

这里 $g_n(x) = x - D_{n+1,j}$。从而

$$(X_{1,j} - D_{2,j}, \cdots, X_{n-1,j} - D_{n,j}) \leq_{sm} (X_{1,i} - D_{2,j}, \cdots, X_{n-1,i} - D_{n,j}).$$

对任意的 $k\,(1 \leq k \leq n-1)$，由引理1中的3)，有 $(X_{k,j} - D_{k+1,j}) \leq_{sm} (X_{k,i} - D_{k+1,j})$。考虑到当 $D_{k,j} = D_{k,i} = N\,(N \geq 0)$ 时，$X_{k,i} - D_{k+1,j}$ 与 $X_{k,i} - D_{k+1,i}$ 同分布，则

$$\left(X_{k,i} - D_{k+1,j} \mid D_{k+1,j} = N \right) \leq_{sm} \left(X_{k,i} - D_{k+1,i} \mid D_{k+1,i} = N \right),$$

由引理1中的4)知 $(X_{k,i} - D_{k+1,j}) \leq_{sm} (X_{k,i} - D_{k+1,i})$，于是

$$(X_{k,j} - D_{k+1,j}) \leq_{sm} (X_{k,i} - D_{k+1,i}).$$

根据引理1中的2)

$$(X_{1,j} - D_{2,j}, \cdots, X_{n-1,j} - D_{n,j}, X_{n,j}) \leq_{sm} (X_{1,i} - D_{2,i}, \cdots, X_{n-1,i} - D_{n,i}, X_{n,i}). \quad (3)$$

由于

$$\phi_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \max\left(0, x_n + \max(0, x_{n-1} + \cdots + \max(0, x_2 + \max(0, x_1 \underbrace{)) \cdots))}_{n}$$

是超模函数，从而 $\varphi_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \phi_{n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) + x_n$ 是超模函数。考虑到

$$\begin{aligned} Q_{n,s} \;=\; & \max\left(0, X_{n-1,s} - D_{n,s} + \max(0, X_{n-2,s} - D_{n-1,s}\right. \\ & \left. + \cdots + \max(0, X_{1,s} - D_{2,s} \underbrace{) \cdots))}_{n-1} + X_{n,s}, \quad s = i, j, \end{aligned}$$

由 (3) 式和引理2可得

$$\varphi_n(X_{1,j} - D_{2,j}, \cdots, X_{n-1,j} - D_{n,j}, X_{n,j}) \leq_{icx} \varphi_n(X_{1,i} - D_{2,i}, \cdots, X_{n-1,i} - D_{n,i}, X_{n,i}),$$

即 $Q_{n,j} \leq_{icx} Q_{n,i}$，至此定理得证。

基于引理1中的2)，由定理3直接得到下面的推论。

推论2 若 $\{X_{n,i}; n \in \mathcal{N}\}$ 和 $\{X_{n,j}; n \in \mathcal{N}\}$ 均为独立随机变量序列，$X_{n,i}$ 与 $X_{n,j}$ 具有相同的分布，则 $Q_{n,j} \leq_{icx} Q_{n,i}\,(n \in \mathcal{N},\, 1 \leq i,\, j \leq k,\, i \neq j)$。

参考文献：

[1] Levy Y, *et al.* Utilization of idle time in an $M/G/1$ queueing systems[J]. Management Science, 1975, 22: 202-211

[2] Doshi B. Queueing systems with vacation: a survey[J]. Queueing Systems, 1986, 1: 29-66

[3] Amal S, *et al.* $M/M/1$ queue with server's vacation[J]. Asia-Pacific Journal of Operational Research, 1986, 3: 21-26

[4] Tian N S, *et al.* $M/G/1$ queues with controllable vacations and optimizing of vacation policy[J]. Acta Mathe Appl Sin, 1991, 7: 363-373

[5] Dukhovny A. Vacations in $GI^X/G^Y/1$ systems and Riemann boundary value problems[J]. Queueing Systems, 1997, 27: 351-366

[6] Fery A, *et al.* An explicit solution for an $M/GI/1$ queue with vacation and exhaustive service discipline[J]. J Operations Research Society of Japan, 1998, 41: 430-441
[7] Levy Y, *et al.* A $M/M/k$ queue with servers vacations[J]. Informatica, 1976, 14: 153-163
[8] Neuts M. Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models[M]. Baltimore: Johns Hopkins Univ Press, 1981
[9] Vinod B. Exponential queue with server vacations[J]. J Operations Research Society, 1986, 37: 1007-1014
[10] Igaki N. Exponential two server queue N-policy and multipe vacations[J]. Queueing Systems, 1992, 10: 279-294
[11] 夏茂辉，田乃硕. 同步 N-策略多重休假的 $M/M/c$ 排队[J]. 运筹学学报，1997, 1: 86-94
Xia M H, Tian N S. The $M/M/c$ queue with cogradient multiple vacation under the N-policy[J]. OR Transactions, 1997, 1: 86-94
[12] 田乃硕. 多服务台休假排队系统的进展[J]. 燕山大学学报，1998, 1: 32-36
Tian N S. Advances in queueing system with multiple vacation[J]. Journal of University of Yanshan, 1998, 1: 32-36
[13] Tian N S, *et al.* Conditional stochastic decompositions in the $M/M/c$ queue with server vacation[J]. Stochastic Models, 1999, 14: 2: 367-377
[14] Prabhu N U. Stochastic comparison for bulk queue[J]. Queueing Systems, 1987, 1: 265-277
[15] Cai N, *et al.* Stochastic comparison for bulk queue[J]. Chinese Journal of Operations Research (in Chinese), 1994, 13: 59-65
[16] Müller A. On the waiting times in queues with dependence between interarrival and service times[J]. Operations Research Letters, 2000, 26: 43-47
[17] Cai N, *et al.* Increasing convex ordering of queue length in bulk queues[J]. Operations Research Letters, 2008, 36: 123-126
[18] Shaked M, *et al.* Stochastic Orders[M]. Springer: Springer Press, 2006: 395-399
[19] Dhaene J, *et al.* Dependency of risks and stop-loss order[J]. Astin Bulletin, 1996, 26: 201-212
[20] Müller A. Some remarks on the supermodular order[J]. Journal of Multivariate Analysis, 2000, 73: 107-119

A Comparison for Queue Lengths of $G^{(X)}/GI^{(Y)}/k$ Queue Systems with Asynchronous Multiple Vacation

YAN Rong-fang, ZHOU Xia

(College of Mathematics and Information Science, Northwest Normal University, Lanzhou 730070)

Abstract: This paper investigates the queue length of an $G^{(X)}/GI^{(Y)}/k$ queuing system with asynchronous multiple vacation. By using the theory and methods of stochastic orders, the increasing convex ordering of queue lengths in different windows is derived by the increasing convex orderings of random variables such as arriving customer size, service frequency and service capacity in these windows, and the increasing convex ordering of queue lengths in different windows is also given through the supermodular ordering of vectors of arriving customer size in these windows.

Keywords: increasing convex ordering; supermodular order; queue length; supermodular function

Received: 18 Aug 2008. **Accepted:** 12 Nov 2008.

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (60474029); the Natural Science Foundation of Gansu Province (ZS-011-A25-024-G); the Foundation of Education Department of Gansu Province (041-41); the NWNU-KJCXGC-03-09.